

Stability by linearization of the Einstein's field
equation, (by J. Girbau and L. Bruna.)

(de la recensió) Josep M. Burgués

28 de maig de 2010

En tractar de globalitzar la seva Teoria de la Relativitat especial, es a dir, de fer cosmologia, A. Einstein hi incorporà la Gravetat (associada a la matèria), mitjançant la idea de que l'efecte d'un camp gravitatori sobre una partícula és exactament el mateix que el d'una acceleració de la mateixa respecte d'un sistema inercial, i que les trajectòries "lliures" havien d'esser geodèsiques. Això el portà a definir la gravitació com una propietat de la mètrica en l'espai-temps, on l'evolució de la mateixa en reflexaria els canvis en la distribució de matèria. D'altra banda, considerà aquesta matèria distribuïda a l'Univers com un fluid perfecte, i els punts en serien les galàxies.

Així l'evolució de l'Univers es pot descriure mitjançant les solucions d'una equació entre tensors, anomenada l'equació d'Einstein,

$$Ric(g) = \chi T,$$

on g representa una mètrica, T és el tensor d'impulsió-energia, corresponent al tensor dels esforços (stress tensor) en un fluid perfecte, amb $\text{div} T = 0$ que representa la matèria, i χ és una constant (la constant cosmològica).

En general T també depèn de g de manera no lineal, i així, expressada en coordenades, l'equació anterior esdevé un sistema de 10 equacions escalars, en derivades parcials, de segon ordre i no lineals, d'una gran complexitat.

Un procediment habitual en l'estudi dels fenòmens regits per aquest tipus d'equacions és el de la linealització: Hom canvia a l'equació per la seva "diferencial", obtenint així una equació lineal i similar. Llavors hom considera les solucions de l'equació lineal com a aproximacions de les solucions de l'equació original. Al cas de l'equació d'Einstein aquest procés fa aparèixer un operador d'alambertia, es a dir que aquesta part lineal està relacionada amb l'operador de les ones (vectorial).

Sorgeix immediatament la qüestió de la validesa del mètode. En primer lloc hi ha les questions generals d'existència i unicitat de solucions de l'equació d'Einstein amb condicions inicials donades, i tot seguit el problema de l'estabilitat del procés de linealització, que clàssicament s'entén com que les solucions de l'equació d'Einstein osculen a l'ordre 1 amb les solucions de la linealitzada, diguem ho així, per a un instant de temps donat, el que permet de formular el problema en termes d'estabilitat respecte de condicions de Cauchy.

Aquest problema ha rebut l'atenció de diversos autors, principalment a partir dels anys 70 del segle XX, com ara Y. Choquet-Bruhat i S. Dreser, A. Fischer i J. E. Marsden, V. Moncrief i d'altres, sempre en absència de matèria i molt al voltant del cas en que la mètrica inicial és la de Minkowski ó similar (en un cert sentit).

En tres articles publicats al tombant de segle, els autors de la present monografia contribuïren a la solució del problema amb resultats pel cas que hi ha matèria, és dir que en l'equació d'Einstein, T no és nul. Com que la mètrica g també intervé a T com a variable, començaren per la revisió del concepte de linealització, amb una nova definició en que T és considerada també com a variable. Aquesta nova formulació els permeté d'estendre els resultats d'estabilitat, ja coneguts al cas del buit, al cas que hi ha matèria, amb condicions (naturals però tècniques) sobre la mida i regularitat de les dades de Cauchy. Finalment, a manera d'aplicació, estengueren els resultats al model cosmològic de Robertson i Walker (la restricció de la mètrica a l'espai té corbatura seccional constant, i els coeficients només depenen del temps), que és un model a la vegada prou simple

i versàtil i per tant molt usat en els treballs de caire fenomenològic. En paraules dels autors "...si interpretem l'univers amb un model de Robertson Walker amb mètrica $\tilde{g}$ i tensor d'impulsió energia T ,... la explosió d'una supernova en una galàxia distant produirà una pertorbació en el tensor d'impulsió-energia inicial, T que revertirà en una pertorbació de la mètrica $\tilde{g}$, i així l'univers deixarà de respondre al model de Robertson i Walker,...tanmateix cal saber si la linealització és (ara,) admissible..."

El llibre en qüestió pretén d'esser un tractat autocontingut, en la mida del que és possible en un tema extraordinàriament tècnic, del problema de la linealització de l'equació d'Einstein. Així comença amb dos capítols introductoris. Al primer hom fa una exposició completa i ben referenciada de la flora i fauna de les varietats pseudoriemannianes i al segon, fa una exposició de la Teoria de la Relativitat, restringida i general, des de l'axiomàtica elemental fins als models cosmològics, amb èmfasi en l'equació d'Einstein i el model de Robertson Walker.

Al tercer capítol hom parla de la linealització de l'equació d'Einstein i la relació amb l'operador de les ones (dalembertià), que en representa el resultat, i molt usada quan es vol fer física fenomenològica.

Aquests capítols fan l'exposició accessible a un públic amb un cert grau de coneixements físics ó matemàtics i fins i tot poden ésser usats, amb les evidents completacions de material (algunes demostracions, etc.) com un curs bàsic de cosmologia (per a físics i matemàtics)

El capítol quart és força més tècnic i bàsicament està destinat a demostrar l'existència i unicitat (llevat de difeomorfismes que no alteren les condicions inicials ni la direcció de propagació de les mateixes) del problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein. Aquest resultat representa, de fet, una reducció que permet de pensar en la restricció a una subvarietat convenient (del tipus espai) d'una solució de l'equació, per comptes de pensar en la solució mateixa, el que representa un bon estalvi tècnic i conceptual.

Aquesta és la part general i introductòria de l'exposició. Cal dir que tant el tercer com el quart capítols tenen un caràcter més avançat i contenen les demostracions de pràcticament tots els resultats exposats.

La resta del llibre està dedicat a l'estudi de l'estabilitat per linealització de les dades de Cauchy, es dir parells g, T donats a una subvarietat, amb condicions de lligadura. Consisteix en una revisió del concepte d'estabilitat, seguit d'una generalització al cas que hi ha matèria, dels resultats d'altres autors abans esmentats i també d'altres resultats obtinguts pels autors del llibre.

La presentació i discussió dels conceptes d'estabilitat per linealització (clàssic i nou) es fa al capítol V, on també s'hi estudien diverses propietats i objectes matemàtics associats.

Els següents capítols, estan dedicats a demostrar resultats d'estabilitat per linealització, entesa segons el nou concepte, de les dades de Cauchy, estenent els d'altres autors al cas $T \neq 0$, i presentant-ne de propis.

El capítol VI conté els teoremes de A. Fischer i J. E. Marsden, i de V. Moncrief que fan referència al cas que, en absència de matèria, les dades de Cauchy són donades en una varietat compacta.

Finalment, els dos darrers capítols detallen la contribució dels autors.

El capítol VII conté la generalització dels treballs de Y. Choquet-Bruhat i S. Dreser, quan les dades de Cauchy són la mètrica de Minkowski i absència de matèria, sobre una varietat no compacta, i dels de Y. Choquet-Bruhat, A.

Fischer i J. E. Marsden, per a mètriques generals que coincideixen amb la de Minkowskii a l'infinit, en el cas que $T \neq 0$.

El capítol VIII és més aplicat i conté l'estudi, en termes de la geometria i topologia de la varietat de base, de l'estabilitat per linealització del model cosmològic de Robertson i Walker.

El caràcter dels darrers quatre capítols del llibre és força tècnic i s'hi inclouen desenvolupaments i resultats de temes de l'Anàlisi Funcional clàssica d'operadors, d'espais de Sobolev, d'equacions en derivades parcials, d'operadors el·líptics, en diverses situacions no standard i que no permeten el recurs directe de la citació. Alguns d'aquests, deguts a J. Bruna, i als autors d'aquest llibre, han donat lloc a sengles publicacions.

Finalment, quelcom d'especialment agraït és el grau de completitud matemàtica del text, l'elecció de la bibliografia i els comentaris sobre la mateixa que en fan els autors, en un àmbit que sovint és una selva de publicacions i resultats.

Recomanem molt la lectura total o parcial del llibre, tant pel contingut com pels mètodes emprats, a matemàtics, físics, i altres persones interessades en l'aplicació de les matemàtiques a la descripció del que percebem com a realitat.

Josep M. Burgués